第 40 卷第 11 期 数学的实践与认识 Vol.40, No.11
2010年 6 月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Jun., 2010

一个包含新的 Smarandache 函数的方程

陈国慧

(海南师范大学 数学与统计学院, 海南 海口 571158)

摘 要: 定义一个新的 Smarandache 函数 $\overline{SL}(n)$, 并研究一个包含该函数的方程. 利用初等方法, 给出了一个包含函数 $\overline{SL}(n)$ 的方程的正整数解. 方程只有五个正整数解.

关键词: 新的 Smarandache 函数; 方程; 正整数解

1 引言及结果

对任意正整数 n, 著名的 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid [1,\ 2,\ \cdots,\ m]$, 其中 $[1,\ 2,\ \cdots,\ m]$ 表示 $1, 2, \cdots, m$ 的最小公倍数 [1]. 例如 $SL(n)$ 的前几个值是 $SL(1)=1$, $SL(2)=2$, $SL(3)=3$, $SL(4)=4$, $SL(5)=5$, $SL(6)=3$, $SL(7)=7$, $\cdots$. 不少学者研究过关于 $SL(n)$ 的初等性质, 并获得了一系列结果, 参阅文献 [2–7]. 现在令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 n 的标准分解式时, 则由 $SL(n)$ 的性质容易得到

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_k^{\alpha_k}\}$$

我们通常将满足条件 $f(n)=\max\{f(p_1^{\alpha_1}), f(p_2^{\alpha_2}),\cdots,f(p_k^{\alpha_k})\}$ 的算术函数 $f(n)$ 称为 Smarandache 可乘函数. 因此 $SL(n)$ 是一个 Smarandache 可乘函数. 受文献 [8] 的启发, 本文定义了一个新的 Smarandache 型函数 $\overline{SL}(n)$ 如下: $\overline{SL}(1)=1$, 当 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式时定义:

$$\overline{SL}(n)=\min\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_k^{\alpha_k}\}$$

研究发现函数 $\overline{SL}(n)$ 与函数 $SL(n)$ 有许多类似的性质, 例如当 n 为素数的方幂时, $\overline{SL}(n)=SL(n)$. 对于 $\overline{SL}(n)$ 函数及欧拉函数 $\varphi(n)$, 经检验我们发现存在无限多个正整数 n 使得 $\sum\limits_{d|n}\overline{SL}(d)>\varphi(n)$. 事实上, 由 (1) 式知, 当 $n=p^\alpha$ 为素数方幂时, 我们有

$$\sum_{d|n}\overline{SL}(d)=\sum_{d|p^\alpha}\overline{SL}(d)=1+p+\cdots+p^\alpha>p^\alpha-p^{\alpha-1}=\varphi(n)$$

同时又存在无限多个正整数 n, 使得 $\sum\limits_{d|n}\overline{SL}(d)<\varphi(n)$. 例如当 n 为两个不同奇素数的乘积时, 即 $n=p\cdot q$, 若 $5\le p<q$ 为素数, 那么

$$\sum_{d|n}\overline{SL}(d)=\sum_{d|p\cdot q}\overline{SL}(d)=1+2p+q<(p-1)\cdot(q-1)=\varphi(n)$$

收稿日期: 2009-04-19
资助项目: 海南省教育厅高等学校科研资助项目 (Hjkj2008-29); 国家自然科学基金 (10671155)

于是我们自然想到, 对于哪些正整数 n, 会有方程

$$\sum_{d|n}\overline{SL}(d)=\varphi(n) \tag{1}$$

成立, 其中 $\sum\limits_{d|n}$ 表示对 n 的所有正因数求和, $\varphi(n)$ 为欧拉函数.

本文的主要目的就是利用初等方法研究方程 (1) 的可解性, 并获得了该方程的所有正整数解. 具体地说也就是证明了下面的:

定理 方程 $\sum\limits_{d|n}\overline{SL}(d)=\varphi(n)$ 有且仅有五个正整数解 $n=1, 75, 88, 102, 132$.

2 引理及其证明

为了完成定理的证明. 首先需要两个简单引理.

引理 1 不等式 $\varphi(m)<4d(m)$ 成立当且仅当 $m=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 56, 60, 72, 80, 84, 96, 120, 144, 168, 288$. 这里 $d(m)$ 为 Dirichlet 除数函数.

证明 令 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 m 的标准素因数分解式. 我们分以下几种情况来进行讨论:

i) 如果分解式中存在因子 2^α 且 $\alpha\geq 6$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)}=\prod_{i=1}^{k}\frac{{p_i}^{\alpha_i}(1-\frac{1}{p_i})}{\alpha_i+1}=\prod_{i=1}^{k}\frac{{p_i}^{\alpha_i-1}(p_i-1)}{\alpha_i+1}\geq\frac{2^{\alpha-1}}{\alpha+1}>4$$

即 $\varphi(m)\geq 4d(m)$.

ii) 如果分解式中存在因子 3^α 且 $\alpha\geq 3$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)}\geq\frac{3^{\alpha-1}\cdot 2}{\alpha+1}>4$$

即 $\varphi(m)\geq 4d(m)$.

iii) 如果分解式中存在因子 5^α 且 $\alpha\geq 2$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)}\geq\frac{5^{\alpha-1}\cdot 4}{\alpha+1}>4$$

即 $\varphi(m)\geq 4d(m)$.

iv) 如果分解式中存在因子 7^α 且 $\alpha\geq 2$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)}\geq\frac{7^{\alpha-1}\cdot 6}{\alpha+1}>4$$

即 $\varphi(m)\geq 4d(m)$.

v) 如果分解式中存在因子 p^α 且 $p\geq 11$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)}\geq\frac{p^{\alpha-1}\cdot(p-1)}{\alpha+1}>4$$

即 $\varphi(m)\geq 4d(m)$.

因此我们只需在 $m=2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma\cdot 7^\delta(0\leq\alpha\leq 5, 0\leq\beta\leq 2,\gamma=\delta=0$ 或 $1)$ 中寻找满足条件 $\varphi(m)<4d(m)$ 的正整数 m 即可, 经过验证, 得出以下的 35 个满足条件的 m: $m=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 56, 60, 72, 80, 84, 96, 120, 144, 168, 288$. 于是完成了引理 1 的证明.

引理 2 当 m 不含有素因子 2 时, 不等式 $\varphi(m) < 6d(m)$ 成立当且仅当 $m = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 21, 27, 33, 35, 45, 63, 105$.

证明 令 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 m 的标准素因数分解式, 其中 $p_i \geq 3(i = 1, 2, \cdots, k)$. 我们分以下几种情况来进行讨论:

i) 如果分解式中存在因子 3^α 且 $\alpha \geq 4$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{3^{\alpha-1} \cdot 2}{\alpha + 1} > 6$$

即 $\varphi(m) \geq 6d(m)$.

ii) 如果分解式中存在因子 5^α 且 $\alpha \geq 2$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{5^{\alpha-1} \cdot 4}{\alpha + 1} > 6$$

即 $\varphi(m) \geq 6d(m)$.

iii) 如果分解式中存在因子 7^α 且 $\alpha \geq 2$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{7^{\alpha-1} \cdot 6}{\alpha + 1} > 6$$

即 $\varphi(m) \geq 6d(m)$.

iv) 如果分解式中存在因子 11^α 且 $\alpha \geq 2$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{11^{\alpha-1} \cdot (p-1)}{\alpha + 1} > 6$$

即 $\varphi(m) \geq 6d(m)$.

v) 如果分解式中存在因子 p^α 且 $p \geq 13$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{p^{\alpha-1} \cdot (p-1)}{\alpha + 1} \geq 6$$

即 $\varphi(m) \geq 6d(m)$.

因此我们只需在 $m = 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7^\gamma \cdot 11^\delta (0 \leq \alpha \leq 3, 0 \leq \beta \leq 1, 0 \leq \gamma \leq 1, 0 \leq \delta \leq 1)$ 中寻找满足条件 $\varphi(m) < 6d(m)$ 的正整数 m 即可, 经过验证, 得出以下 14 个满足条件的 m: $m = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 21, 27, 33, 35, 45, 63,105$.

于是完成了引理 2 的证明.

3 定理的证明

现在我们利用这两个引理来给出定理的证明. 容易验证 $n = 1$ 是方程的解. 设 $n > 1$ 且 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准素因数分解式, 因为 $n = p^\alpha$ 不满足方程, 所以当 n 满足方程时有 $k \geq 2$. 现在设

$$SL(n) = \max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_k^{\alpha_k}\} = p^\alpha$$

为方便起见设 $n = mp^\alpha$ 满足方程, 此时应有:

$$\sum_{d|n} \overline{SL}(d) = \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{d|m} \overline{SL}(dp^i) = \sum_{d|m} \overline{SL}(d) + \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{d|m} \overline{SL}(dp^i) = p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(m)$$

因为当 $d|m$ 时, $\overline{SL}(dp^i) \leq p^i$, 所以

$$p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(m) \leq \sum_{d|m} \overline{SL}(d) + \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{d|m} p^i = \sum_{d|m} \overline{SL}(d) + d(m) \cdot \sum_{i=1}^{\alpha} p^i$$

$$=\sum_{d|m}\overline{SL}(d)+\frac{p(p^\alpha-1)}{p-1}d(m)$$

上式两边同除以 $p^{\alpha-1}(p-1)$, 并注意到当 $d|m$ 时 $\overline{SL}(d)\le p^i$, 所以有

$$\varphi(m)\le\sum_{d|m}\frac{\overline{SL}(d)}{p^{\alpha-1}(p-1)}+\frac{p(p^\alpha-1)}{p^{\alpha-1}(p-1)^2}d(m)$$

$$\le\frac{p}{p-1}\cdot d(m)+(\frac{p}{p-1})^2\cdot d(m)=\frac{p(p-1)+p^2}{(p-1)^2}\cdot d(m)$$

当 $p>2$ 时, 上式变为 $\varphi(m)<4\varphi(m)$, 当 $p=2$ 时, 上式变为 $\varphi(m)\le 6\ d(m)$. 即若 $n=mp^\alpha$ 满足方程, 当 $p>2$ 时, 应有 $\varphi(m)<4d(m)$, 也就是当 $\varphi(m)\ge 4d(m)$ 时, $n=mp^\alpha$ 不是方程的解; 或当 $p=2$ 时, 应有 $\varphi(m)\le 6d(m)$, 也就是当 $\varphi(m)>6d(m)$ 时, $n=m\cdot 2^\alpha$ 不是方程的解.

由引理 1 可知, $\varphi(m)<4d(m)$ 当且仅当 $m=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 56, 60, 72, 80, 84, 96, 120, 144, 168, 288$. 由引理 2 可知,$p=2$ 时, $\varphi(m)\le 6d(m)$ 当且仅当 $m=1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 21, 27, 33, 35, 45, 63,105$. 下面只需讨论在上述列举的 m 中, 那些 $n=mp^\alpha$ 满足方程即可.

1) 当 $m=1$ 时, $n=p^\alpha$, 这里 p 是任意素数.

$$\sum_{d|p^\alpha}\overline{SL}(d)=1+p+p^2+\cdots+p^\alpha>p^\alpha-p^{\alpha-1}=\varphi(p^\alpha)$$

即 $n=p^\alpha$ 不是方程 (1) 的解.

2) 当 $m=2$ 时, $n=2p^\alpha$, 这里 $p\ge 3$.

$$\sum_{d|2p^\alpha}\overline{SL}(d)=\sum_{d|p^\alpha}\overline{SL}(d)+\sum_{d|p^\alpha}\overline{SL}(2d)=\sum_{d|p^\alpha}\overline{SL}(d)+2(\alpha+1)$$

$$=1+p+p^2+\cdots+p^\alpha+2(\alpha+1)$$

$$\sum_{d|2p^\alpha}\overline{SL}(d)>\varphi(2p^\alpha)=\varphi(2)\varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}$$

所以 $n=2p^\alpha(p\ge 3)$ 不是方程 (1) 的解.

3) 当 $m=3$ 时, $n=3p^\alpha$, 这里 $p\ne 3$, 若 $p=2$,

$$\sum_{d|3\cdot 2^\alpha}\overline{SL}(d)=\sum_{d|2^\alpha}\overline{SL}(d)+\sum_{d|2^\alpha}\overline{SL}(3d)=2^{\alpha+1}+3\alpha+1$$

对 α 用数学归纳法可证 $2^{\alpha+1}+3\alpha+1>3\cdot 2^{\alpha-1}$, 即

$$\sum_{d|3\cdot 2^\alpha}\overline{SL}(d)>\varphi(3\cdot 2^\alpha)$$

若 $p=5$, 当 $\alpha=1$ 时,$n=15$ 不是方程 (1) 的解; 当 $\alpha=2$ 时,$n=75$ 满足方程 (1), 因而是方程 (1) 的解; 当 $\alpha\ge 3$ 用数学归纳法可证

$$\sum_{d|3\cdot 5^\alpha}\overline{SL}(d)=1+5+5^2+\cdots+5^\alpha+3(\alpha+1)<2(5^\alpha-5^{\alpha-1})=\varphi(3\cdot 5^\alpha)$$

此时 $n=3\cdot 5^\alpha$ 不是方程 (1) 的解.

若 $p\ge 5$ 时, 同上可证 $n=3\cdot p^\alpha$ 不是方程 (1) 的解.

4) 当 $m=4$ 时, $n=4p^\alpha$, 则 $p\ge 3$, 分 $p=3, p=5, p=7, p=11, p=13$ 及 $p>13$ 六种情况用上面的方法讨论得知 $n=4p^\alpha$ 都不是方程 (1) 的解.

5) 当 $m=5$ 时, 分 $p=2, p=3, p>5$ 讨论 $n=5p^\alpha$ 都不是方程 (1) 的解.

6) 当 $m=6$ 时, $n=6p^\alpha$, 则 $p\geq 5$. 经过验证得知当 $p=17,\alpha=1$ 时, $n=102$ 是方程 (1) 的解, 其它情况都不是方程 (1) 的解.

7) 当 $m=7,8,9,10$ 时, 同上可验证 $n=m\cdot p^\alpha$ 都不是方程 (1) 的解.

8) 当 $m=11$ 时, 由引理 2 知道, $p=2$, 此时 $n=11\cdot 2^\alpha$, 容易验证当 $\alpha=3$ 时 $n=88$ 是方程 (1) 的解, 而对 α 的其它取值 n 都不是方程 (1) 的解.

9) 当 $m=12$ 时, 则 $n=12\cdot p^\alpha$, 此时 $p\geq 5$. 容易验证当 $p=11,\alpha=1$ 时, $n=132$ 是方程 (1) 的解, 而对 p 及 α 的其它取值 n 都不是方程 (1) 的解.

10) 当 $m=27,33,35,45,63,105$ 时, $p=2$, 可以验证这时的 $n=m\cdot 2^\alpha$ 都不是方程 (1) 的解.

11) 当 $m=14,15,16,18,20,21,24,28,30,32,36,40,42,48,56,60,72,80,84,96,120,144,168,288$, 同上可以验证这时的 $n=m\cdot p^\alpha$ 都不是方程 (1) 的解.

综上所述, 方程 $\sum_{d|n}\overline{SL}(d)=\varphi(n)$ 有且仅有五个正整数解 $n=1,75,88,102,132$. 这就完成了定理的证明.

参考文献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions, Chicago, Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Balacenoiu I and Seleacu V. History of the Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 1999, 10: 192-201.

[3] Murthy A. Some notions on least common multiples[J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12: 307-309.

[4] Le Maohua, An equation concerning the Smarandache LCM function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 186-188.

[5] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[6] Lv Zhongtian. On the F Smarandache LCM function and its mean value[M]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 22-25.

[7] 潘承洞、潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[8] 陈国慧、张沛. 一个包含新的 F. Smarandache 函数的方程 [J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(23): 193-197.

The Value Distribution of a New Smarandache Function

CHEN Guo-hui

(College of Mathematics and Statistics, Hainan Normal University, Haikou 571158, China)

Abstract: Aim: To study an equation involving a new Smarandache function $\overline{SL}(n)$. Methods: Using the elementary methods. Results: Get all its positive integer solutions of this equation. Conclusion: The equation have only five positive integer solutions.

Keywords: A new Smarandache function; equation; positive integer solutions.